連続的会計財務モデルの数学的形成
―内部収益指数の存在と一意性について―

渡　辺　　力

1　はじめに

古田孝臣（金沢大学理学部数学科，現福井工業大学工学部），上領英之（広島修道大学商学部）両教授は文献［1］において離散的ケースにおける会計財務に関する数学的モデルを形成し，その分析を通して自己資本の現在価値の評価を検討した。さらにそれをもとにして理論株価を与える式を構成しそのシミュレーションを行った結果，それが実際の市場株価に対する良い近似を与えることを示した。その内容の大筋は次の通りである。

T_n を初期の自己資本，w 期後の自己資本の現在価値 $VT_n(w)$ を

$$VT_n(w)=T_n+\sum_{k=1}^{w}\frac{\Delta T_n^{(k)}}{(1+r)^k} \qquad (*)$$

で与える。ここで $\Delta T_n^{(k)}$ は第期における自己資本の増分，r は割引率である。$w=\infty$ の場合 r を一定としてもこの割引率 r は $r>\lambda-1$ という制約を受ける。ここに

$$\lambda=\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|\Delta T_n^{(k)}|}$$

である。実際の財務データと比較した場合，この収束の速さが大きく影響を与える。そこで期間を有限，割引率を一定としたモデルについて考えることにする。さらに実際の財務データの考察により次の四つの前提を設定する。

（1）　$\Delta T_n^{(k)}$ はその期間における社内留保（＝総資産の増分）に等しい。
（2）　総資産成長率は期間に関係なく一定である。
（3）　社内留保成長率は期間に関係なく一定である。

（4）　税引後純利益に対する留保性向は期間に関係なく一定である。

以上の仮定のもとで有限等比級数（＊）を考察し，それをもとに理論株価を与える式を構成した。また文献［1］の最後で，無限期間の場合，割引率として自己資本に対する内部収益率 r_n や総資産に対する内部収益率 r_T をとることの是非を今後の研究課題として上げている。ここで T を総資本，D_i を配当とするとき r_n, r_T は次の式で与えられるものである。

$$T=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{D_i^{(k+1)}}{(1+r_T)^{(k+1)}}, \qquad T_n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{D_i^{(k+1)}}{(1+r_n)^{k+1}} \qquad (**)$$

本論文は期間を連続的とし，長さも無限として式（＊＊）を拡張し，それを数学的に扱うことを目的とした一つの試みである。ここにこの論文の作成のために会計学的知識のない筆者のためにさまざまなアドヴァイスをしてくれた古田孝臣，上領英之両先生に紙面を借りて厚くお礼申し上げます。特に古田先生には問題の所在，数学的に扱う場合の注意やヒントなど大変お世話になりました。ここに改めて深く感謝いたします。

2　期間 x が連続的変数の場合の問題の設定

［1］　自然対数の底 e にたいし，$e^{f(x)}$ を $\exp(f(x))$ と表わすことにする。$x=0,1,2,\ldots$ にたいして定義された正値関数 $h(x)$ にたいし，$h(x+1)=h(x)(1+\ell_h(x))$ を満たす関数 $\ell_h(x)$ を成長率と呼ぶ。$\ell_h(x)$ が定数ならそれを ℓ_h とおくと

$$h(x)=h(0)(1+\ell_h)=h(0)\exp(\log(1+\ell_h))=h(0)\exp(p_h(x))$$

となる。ここに $p_h(x)=x\log(1+\ell_h)$ である。そこで一般に $x\geq 0$ で定義された微分可能で正値な関数 $h(x)$ にたいしてその成長指数を次のように定義する。

定義1　$h(x)=h(0)\exp(p_h(x))$，$p_h(0)=0$ を満たす関数 $p_h(x)$ を $h(x)$ の成長指数とよぶ。

注意　$p_h(x)$ が一次式のとき，それを $x\log(1+\ell_h)$ とおくと $h(x+1)=h(x)(1+\ell_h)$ となり，離散的な場合とは異なるが本質的には同じと見てよい。

［2］ 変数 x は x 期を表わすものとし，次の記号を用いる。

$T(x)$ ： x 期の総資産
$T_n(x)$ ： x 期の自己資本
$Y_R(x)$ ： x 期の社内留保
$Y_{Rn}(x)$ ： x 期の社内留保のうちの自己資本分
$Y_A(x)$ ： x 期の税引き後純利益

データの意味から $Y_A(x) \geq Y_R(x) \geq Y_{Rn}(x)$, $T(x) \geq T_n(x)$ である。また出発点をどこにとるかは本質的でないので，$T(x)$, $T_n(x)$ は $x \geq 0$ で正としてよい。

定義 2 $\dfrac{d}{dx} a_T(x) = a'_T(x) = \dfrac{Y_A(x)}{T(x)}$, $a_T(0)=0$ および $a'_n(x) = \dfrac{Y_A(x)}{T_n(x)}$, $a_n(0)=0$ を満たす関数 $a_T(x)$, $a_n(x)$ をそれぞれ総資産および自己資本に対する会計的利益率と呼ぶ。

さて，ふたつの式 $Y_A(x) - Y_R(x)$, $Y_A(x) - Y_{Rn}(x)$ は 1 でのべた（＊＊）における配当と考えることが出来る。そこで

定義 3 $w(x) = a'_T(x) T(x) - Y_R(x) = Y_A(x) - Y_R(x)$ にたいし

$$T(s)\exp(-r_T(s)) = \int_s^\infty w(x)\exp(-r_T(x))\,dx, \quad r_T(0)=0$$

を満たす関数 $r_T(x)$ を総資産にたいする内部収益指数と呼ぶ。

定義 3′ $w_n(x) = a'_n(x) T_n(x) - Y_{Rn}(x) = Y_A(x) - Y_{Rn}(x)$ にたいし

$$T_n(s)\exp(-r_n(s)) = \int_s^\infty w_n(x)\exp(-r_n(x))\,dx, \quad r_n(0)=0$$

を満たす関数 $r_n(x)$ を自己資本にたいする内部収益指数と呼ぶ。

注意 K.J.Arrow and D.Levhari は文献［2］で問題の設定は異なるが内部利子率の一意性を得るために現価法と呼ばれる投資の中断という考え方を導入している。それは 0 期から s 期までの積分を考えることに対応している。我々の場合は s 期以後の無限積分を s 期の価値で見ているということになる。
さて 定義 3 をみたす r_T が存在するとする。その両辺を s で微分すると

$$T'(s)\exp(-r_T(s))-r'_T(s)T(s)\exp(-r_T(s))=-w(s)\exp(-r_T(s))$$

となる。これより　$w(x)=r'_T(x)T(x)-T'(x)$　であるから

$$r_T(x)=\int_0^x \frac{T'(u)}{T(u)}du+\int_0^x \frac{w(u)}{T(u)}du=\log T(x)$$

$$+\int_0^x \frac{w(u)}{T(u)}dx-\log T(0) \qquad (***)$$

となる。またこのとき

$$\int_s^m w(x)\exp(-r_T(x))dx=\int_s^m r'_T(x)T(x)\exp(-r_T(x))dx-\int_s^m T'(x)\exp(-r_T(x))dx$$

$$=[-T(x)\exp(-r_T(x))]_s^m+\int_s^m T'(x)\exp(-r_T(x))dx-\int_s^m T'(x)\exp(-r_T(x))dx$$

$$=T(s)\exp(-r_T(s))-T(m)\exp(-r_T(m))$$

となる。そこで

$$f_T(x)=\int_0^x \frac{w(u)}{T(u)}dx$$

とおくと

$$T(m)\exp(-r_T(m))=T(m)\exp(-\log T(m)-f_T(m)+\log T(0))$$

$$=T(0)\exp(-f_T(m))$$

となり従って $r_T(x)$ の存在から $\lim_{m\to\infty} f_T(m)=\infty$ でなければならない。逆に $\lim_{m\to\infty} f_T(m)=\infty$ ならば $r_T(x)$ を（＊＊＊）で与えれば定義３をみたすことは上の計算から明らかである。この計算は $r_n(x)$, $T_n(x)$ にたいしても全く同じである。さらに

$$\frac{w_n(x)}{T_n(x)}=\frac{Y_A(x)-Y_{Rn}(x)}{T_n(x)}\geq\frac{Y_A(x)-Y_R(x)}{T_n(x)}\geq\frac{Y_A(x)-Y_R(x)}{T(x)}=\frac{w(x)}{T(x)}$$

であるから

$$\int_0^\infty\frac{w(x)}{T(x)}dx=\infty \quad\Rightarrow\quad \int_0^\infty\frac{w_n(x)}{T_n(x)}dx=\infty$$

が成立する。これより次の定理を得る。

定理 1　$\int_0^\infty \frac{w(x)}{T(x)}\,dx=\infty$　ならば　総資産および自己資本にたいする内部収益指数は一意的に存在しそれらは次の式で与えられる。

$$r_T(x)=\log T(x)+\int_0^x\frac{w(u)}{T(u)}\,du-\log T(0)$$

$$r_n(x)=\log T_n(x)+\int_0^x\frac{w(u)}{T_n(u)}\,du-\log T_n(0)$$

次に，1でのべた離散的な場合に相当する次の前提を考える。

(1)　$T'(x)=Y_R(x)$, $T'_n(x)=Y_{Rn}(x)$　(これは再投資率 =1.0 と言われるものである)。

(2)　$Y_R(x)>0$　かつ　1より大きい定数kがあって　$\frac{Y_A(x)}{Y_R(x)}\geq k$　を満たす。

(3)　$T(x)$ の成長指数 $p_T(x)$ は $p''_T(x)\geq 0$ を満たす。

このとき

定理 2　総資産および自己資本にたいする内部収益指数は存在し，それは対応するそれぞれの会計的利益率に等しい。

証明

$$\frac{w(x)}{T(x)}=\frac{Y_A(x)-Y_R(x)}{T(x)}\geq\frac{(k-1)Y_R(x)}{T(x)}=\frac{(k-1)T'(x)}{T(x)},\quad T(x)=T(0)\exp(p_T(x))$$

であるからこれより

$$\int_0^x \frac{w(x)}{T(x)}dx \geq (k-1)(\log T(x)-\log T(0))=(k-1)p_T(x)$$

となる。そこで

$$\phi(x)=p_T(x)-\frac{Y_R(0)}{T(0)}x$$

とおくと，$Y_R(x)=T'(x)=p'_T(x)T(x)$，$\phi''(x)=p''_T(x)\geq 0$，であるからこれより

$$p_T(x) \geq \frac{Y_R(0)}{T(0)}x \quad (x \geq 0)$$

となる。したがって

$$\int_0^\infty \frac{w(x)}{T(x)}dx=\infty$$

となり定理1からそれぞれの内部収益指数は存在する。さらに

$$\int_0^x \frac{w(u)}{T(u)}du=\int_0^x \frac{a'_T(u)T(u)-Y_R(u)}{T(u)}du=\int_0^x a'_T(u)du-\int_0^x \frac{T'(u)}{T(u)}du$$

$$=a_T(x)-(\log T(x)-\log T(0))$$

であるから，$r_T(x)=a_T(x)$ 即ち総資産にたいする内部収益指数と総資産にたいする会計的利益率とは一致する。$r_n(x)$ についても全く同様である。

3　おわりに

現実の問題としては企業の業績不振や設備投資などで赤字即ち，$Y_A(x)\leq 0$ となる期もある。そのときは $Y_R(x)=Y_{Rn}(x)=0$ と考えるにしても

$$\int_0^\infty \frac{w(x)}{T(x)}dx,\ \int_0^\infty \frac{w(x)}{T_n(x)}dx$$

の収束性については何の結論も下せない。この場合は別の問題設定が必要になろう。

参 考 文 献

[1] 古田孝臣, 上領英之;「会計財務に関するモデルの数学的形成とその応用」, Chubu Forum for Mathmatical Sciences, Vol.1, Dec.1996, 1-18.

[2] Arrow,K.J. and Levhari,D.,"Uniqueness of the Internal Rate of Return with Variable Life of Investment", The Economic Journal, Sept., 1969, 560-566.

[3] 松田和久;「経済計算の原理」, 千倉書房, 昭和61年。